Aproximaciones al problema de los tres cuerpos (un caso particular de la dinámica estelar)

CARLOS A. ALTAVISTA

Observatorio Astronómico, La Plata

Abstract: The object of this paper is to give a brief account of the results obtained by Poincaré in his studies of the convergence of series which satisfy formally the differential equations of motion and to look for the possibility that the application to a particular case of dynamics be successful. It is well known that Poincaré has deal with equations of the form:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y_i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta x_i}$$

where it is assumed that F admits an expansion

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots ,$$

the functions F_i $(i = 1,2,3,\ldots n,\ldots)$ depending upon two sets of coordinates x and y, the y's being periodic functions, the x's appearing in the coefficients of the periodic functions. F_0 in the other hand, must depend only on the x's and such that the Hessian with respect to these coordinates vanishes. In a particular case of dynamics in which F depends quadratically on the coordinates and velocities, G. Contopoulos has shown that an approximate invariant $\Phi =$ const. can be build up, Φ is a truncated series the terms of which depend on two sets of coordinates x and y, defined by Whittaker from the principles ruled by Poincaré. If this invariant can be used as intermediante function, instead of F, for obtaining a determinant function S from which according to classical principles the x's and y's are to be derived, then the results given by Poincaré could be correctly applied word by word to Contopoulos' in order to demonstrate, at least qualitatively, that the series defining the value of Φ diverges.

En el curso de los últimos tres lustros se ha renovado el interés por el estudio de soluciones teóricas más generales para los problemas de la Dinámica Estelar. Entre las investigaciones más destacadas se encuentran las de G. Contopoulos referentes a la búsqueda de soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales canónicas en las cuales se supone que el Hamiltoniano es en primera aproximación una función cuadrática en las coordenadas y componentes de la velocidad. La integración de estas ecuaciones para un caso particular ha permitido a este autor definir una función, aproximadamente constante en un lapso dado, y que ha denominado tercera integral del movimiento, y que podemos definir como un invariante que permite describir movimientos en zonas limitadas de espacio, es decir que es de utilidad para hallar recintos fuera de los cuales los movimientos no tienen lugar.

El método seguido por G. Contopoulos consiste en escribir para un potencial (galáctico) de la forma

$$(1) \qquad 2\,W = \frac{C^2}{r^2} - P\xi^2 - Qz^2 + 2b\xi z^2$$

las ecuaciones de movimiento son:

$$(2) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -P\xi + bz^2 , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -Qz + 2b\xi z$$

donde se supone que P/Q es irracional. La forma canónica de estas ecuaciones es:

$$(3) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\delta F}{\delta R}, \; \frac{dR}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta \xi}; \; \frac{dz}{dt} = \frac{\delta F}{\delta Z}, \; \frac{dZ}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta z}$$

donde: $R = d\xi/dt$, $Z = dz/dt$.

$$(4) \qquad F = \frac{1}{2}\,(R^2 + Z^2 + P\xi^2 + Qz^2 - 2b\,\xi z^2)$$

expresión que puede escribirse

$$(5) \qquad F = F_0 + b\,F_1$$

con

$$(6) \qquad F_0 = \frac{1}{2}\,(R^2 + Z^2 + P\xi^2 + Qz^2) \quad \text{y}$$

$$(7) \qquad F_1 = -\xi z^2$$

La búsqueda de una nueva integral de movimiento se realiza suponiendo que existe una función Φ que admite un desarrollo de la forma

$$(8) \qquad \Phi = \Phi_0 + b\Phi_1 + b^2\Phi_2 + \ldots$$

siempre que el parámetro constante b sea suficientemente pequeño.

Se entiende que esta función así definida será periódica como F pero la aplicación del criterio de Poincaré para definir la involución de F y Φ exige que F_0 sea únicamente función de las variables no angulares del problema. A estos efectos se debe escribir

$$(9) \qquad \xi = \frac{2x_1}{\sqrt{P}}\cos y_1, \quad R = \sqrt[4]{P}\sqrt{2x_1}\,\mathrm{sen}\,y_1;$$

$$z = \frac{2x_2}{\sqrt{Q}}\cos y_2, \quad Z = \sqrt[4]{Q}\sqrt{2x_2}\,\mathrm{sen}\,y_2$$

con lo que las ecuaciones de movimiento conservan su forma canónica. En la primera aproximación es:

(10) $F_0 = Px_1 + Qx_2$, cuyo Hessiano respecto a x_1 y x_2 es claramente nulo. Si bien, como lo afirma G. Contopoulos, el problema no puede tratarse desde el punto de vista expuesto por Poincaré para considerar la existencia de nuevas integrales, será evidente, y aquí consideramos que G. Contopoulos ha cometido una omisión, la cuestión entra dentro de los cánones fijados por el autor francés para el estudio de la validez de la convergencia de las soluciones que satisfacen formalmente a las ecuaciones de movimiento, precisamente cuando el Hessiano mencionado es nulo.

Pero antes de entrar a tratar esta cuestión haremos mención brevemente del procedimiento usado por G. Contopoulos para definir el invariante Φ. Estt autor parte entonces de la premisa que si existe una integral del movimiento distinta de F, debe verificarse

(11) $(F,\Phi) = 0.$

Es claro que si F y Φ admiten desarrollos en series de potencias del parámetro b, se verificarán simultáneamente las condiciones:

(12) $(\Phi_0,F_0) = 0$

(13) $(\Phi_0,F_1) + (\Phi_1,F_0) = 0$

(14) $(\Phi\ ,F_1) + (\Phi\ ,F_0) = 0$

De modo que si se puede obtener una expresión conocida para el valor Φ_0, se podrá por recurrencia determinar los términos de la serie (8).

En lo que respecta a este procedimiento debemos recordar que dentro del esquema de la teoría de las transformaciones de contacto de las fdnciones F y Φ, que nosotros supondremos por un instante integrales definidas en forma cerrada de un problema dado, satisfacen la condición de involución:

(*) $(F,\Phi) = 0$

En las condiciones enunciadas el concepto de integral uniforme y la analiticidad supuesta de la función significan que una función tal es susceptible de un desarrollo en serie, que en el caso particular de la teoría planetaria ocurrirá según las potencias crecientes de un pequeño parámetro, la masa perturbadora. En otras palabras la integral $F = C$ admite una representación en serie de la forma

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

lo que claramente implica que la constante C puede ser expresada de una manera similar. La existencia de otra integral en el problema permite aplicar las mismas consideraciones recientes, por lo que la expresión involutoria (*) y expresiones tales como las (12), (13) y (14) anteriormente escritas son válidas automáticamente, es decir se satisfacen "per se".

Muy distinta es la situación planteada en el caso conocido como determinación de la tercera integral del movimiento. Pues aún admitiendo que la (12) pueda ser escrita automáticamente, dada la naturaleza de la función Φ_0, no queda otro remedio que admitir que las expresiones sucesivas (12), (13), (14), sólo pueden ser escritas en las condiciones que las sucesivas funciones Φ_1, sean integrales hasta la aproximación del orden i respectivo. Aún así no estaríamos en condiciones de afirmar que la función resultante en (8) sea integral del problema como veremos después. En otras palabras las condiciones (12), (13), etc, representan condiciones *impuestas* de antemano, y en modo alguno podremos asegurar en definitiva que la expresión de la supuesta integral admite una forma analítica cerrada. Queda pues un interrogante cuya respuesta buscaremos en el tratamiento siguiente.

Retomemos para ello la línea de exposición y digamos que la solución formal del sistema de ecuaciones (12), (13),... (14) conduce a expresar el invariante en términos de las variables ξ, R, z, Z. En los coeficientes correspondientes a las diversas aproximaciones aparecen denominadores de las formas P—4Q, P—Q de modo que el estudio de la convergencia de un desarrollo tal se deberá prestar atención especial a los valores admisibles para las constantes P y Q que no determinen una solución de carácter ilusorio así como prestar atención a la consideración de las constantes de integración cuyo significado adquiere un rol preponderante en la determinación de aquellas condiciones que esencialmente definen la calidad de solución periódica. En otras palabras, parte de esas constantes, serán las que determinarán las orientaciones iniciales cuyo conocimiento es decisivo para poder decidir sobre la posibilidad de existencia de tales soluciones. Pero antes de dar los lineamientos generales, seguirá aquí una observación de G. Contopoulos referente al valor del resultado que ha obtenido y que transcribimos literalmente:

"If Φ or any similar integral Φ is convergent at all the points of an energy surface, it represents an isolating (uniform) analytical integral of motion independent of F. The convergence of this integral has not been established. However, as we shall see in the last section of this paper, the calculations give very accurate numerical results regarding the forms of the orbits of stars in a galaxy".

Veamos entonces

LAS INVESTIGACIONES DE POINCARE SOBRE CONVERGENCIA DE LAS SOLUCIONES EN LOS CASOS EN QUE EL POTENCIAL DETERMINE UN HAMILTONIANO TAL QUE LA PARTE INDEPENDIENTE DE LAS VARIABLES NO ANGULARES TENGA HESSIANO NULO RESPECTO DE LA OTRA SERIE DE VARIABLES.

Recordemos ante todo que el problema central radica en la integración de un sistema de ecuaciones de la forma

(15) $$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y_i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde

(16) $F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$

y cuya significación de símbolos ya ha sido dada anteriormente. La función F será en general analítica y uniforme en las variables x, y, periódica respecto de las y.

Por otra parte definida las dos series conjugadas de elementos canónicos

$$(17) \qquad L,\ L',\ G,\ G',\ \Theta,\ \Theta',$$

resultará de lo dicho anteriormente que en F_0 solamente estarán presentes las variables L y L′ que como se sabe son respectivamente funciones de los semiejes mayores de las órbitas de dos planetas. Por otra parte puede definirse al movimiento medio en la primera aproximación por medio de:

$$(18) \qquad n_1 = -\frac{\delta F_0}{\delta x_1}$$

de modo que en esa aproximación hay cuatro derivadas nulas:

$$(19) \qquad -\frac{\delta F_0}{\delta G} - \frac{\delta F_0}{\delta G'} - \frac{\delta F_0}{\delta \Theta'} - \frac{\delta F_0}{\delta \Theta}$$

En esta teoría la convergencia tiene como primera premisa la no existencia en los coeficientes de los términos trigonométricos de la solución, denominadores que contengan combinaciones lineales, con coeficientes enteros, de los movimientos medios. Esto no ocurrirá seguramente en el caso de tres masas que se mueven coplanarmente con ley de atracción no newtoniana, pues ya en el problema de dos cuerpos, aún permaneciendo fijos los nodos con una ley tal, los perihelios se desplazarán y por lo tanto los métodos usados por Poincaré para el estudio de la conducta de las soluciones son válidos. Posteriormente veremos qué características de la solución encarada por G. Contopoulos se encuadran dentro de esta cuestión.

Será conveniente ahora examinar brevemente algunos conceptos fundamentales que se utilizan para justificar la validez de los resultados que proveen los desarrollos que ordinariamente se usan en Mecánica Celeste. Como se sabe tales series satisfacen formalmente a las ecuaciones diferenciales del movimiento, cuestión que tiene su origen en el hecho que la elección de los valores de las constantes de integración, aspecto que resulta fundamental para garantir la convergencia de los resultados, depende de la solución, respecto de esas constantes, de un sistema de ecuaciones lineales, cuyo determinante respecto de las incógnitas es un Hessiano nulo.

Consideremos entonces el problema de las denominadas igualdades asintóticas en el problema de las series astronómicas. Ello nos permitirá comprender el significado de la locución: "series que satisfacen formalmente las ecuaciones diferenciales del movimiento". Supongamos dada la serie divergente:

$$(20) \qquad f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots \mu^p f_p + \dots$$

los coeficientes f_0, f_1, ... pueden depender de las variables x solamente, o bien depender simultáneamente de las x y del parámetro μ. Definida ahora una relación θ (x, μ) entre las x y μ, escribimos:

$$(21) \qquad \Theta_p = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots + \mu^p f_p\ ;$$

si se tiene:

$$(22) \qquad \lim \frac{\Theta - \Theta_p}{\mu^p} = 0, \text{ para } \mu = 0,$$

diremos que la serie (20) representa asintóticamente a la función Θ y puede escribirse:

$$(23) \qquad \Theta\,(x, \mu) \equiv f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots ;$$

expresiones de este tipo han sido denominadas por Poincaré asintóticas. Resulta que si μ es muy pequeño, la diferencia $\Theta - \Theta_p$ también lo será y cuando la serie (23) sea divergente la suma de sus primeros $p + 1$ términos satisface prácticamente a la función θ y desde el punto de vista astronómico tal serie resulta convergente. Propiedades de las funciones e igualdades asintóticas respecto a la derivación y la integración han sido demostradas por Poincaré en Les Méthodes Nouvelles, T. II.

Para completar este exordio sobre la factibilidad de aplicar los métodos delineados por este autor al caso de las series de la Dinámica Estelar propugnadas por G. Contopoulos, conviene recordar una transformación operada en las ecuaciones diferenciales usadas en dos de los métodos principales desarrollados en teoría planetaria, e identificar una nueva forma para las ecuaciones diferenciales con la utilizada por el segundo autor. Recordemos que en su teoría planetaria Gylden considera ecuaciones diferenciales del tipo:

$$(24) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = \mu\Phi'(y,x)$$

donde Φ' es una función desarrollable según las potencias de y y periódica en x. Se verá inmediatamente que este tipo de ecuaciones puede ser llevada a forma canónica y la única diferencia del caso será una expresión para el Hamiltoniano de naturaleza distinta que la que corresponde al caso estelar. Pero esta no es una cuestión esencial respecto de lo que nos interesa ahora. Hay otra propiedad que resultará inmediatamente y cuya analogía con el problema estelar de Contopoulos saltará con toda evidencia. Escribamos a este efecto:

$$(25) \qquad \begin{gathered} -F = q^2/2 + n^2y^2/2 - \Phi'(y,x) + p \\ dx/dt = -dF/dp = 1,\ dy/dt = -dF/dq = q, \\ dp/dt = dF/dx,\ dq/dt = dF/dy = -n^2y + \Phi'(y,x) \end{gathered}$$

Escribiendo a continuación:

$$(26) \qquad \begin{gathered} y = \varrho \operatorname{sen} y_1,\ q = n\varrho \cos y_1, \\ \frac{n}{2}\varrho^2 = x_1,\ p = x_2,\ x = y_2 \end{gathered}$$

y las ecuaciones de movimiento devienen:

$$(27) \qquad dx_i/dt = dF/dy_i,\ dy_i/dt = -dF/dx_i \quad (i = 1,2)$$

en donde:

$$—F = n\,x_1 + x_2 - \mu\Phi(2x_1/n \text{ sen } y_1, y_2)$$

Poniendo aquí $\mu = 0$ queda

(28) $\quad F_0 = -n\,x_1 - x_2$

y por lo tanto

$$n_1^0 = -dF_0/dx_1 = -n,\ n_2^0 = -dF_0/dx_2 = 1.$$

Si n es inconmensurable los métodos de Poincaré son inmediatamente aplicables y en consecuencia será posible estudiar la conducta de las soluciones que satisfacen formalmente a las ecuaciones de movimiento. Esto resulta obvio en el caso de tres cuerpos que son coplanares y que se mueven con ley de atracción no newtoniana y aún en el caso que la ley lo sea, si se efectúan algunas modificaciones al método (Poincaré, Les Méthodes Nouvelles, T II). En consecuencia también estos razonamientos serán válidos para el caso estelar planteado por G. Contopoulos.

Consideremos entonces el sistema de ecuaciones canónicas

(29) $\quad dx_i/dt = dF/dy_i,\ dy_i/dt = -dF/dx_i\ (i = 1,2)$

donde

(30) $\quad F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$

Las (29) pueden ser satisfechas formalmente por series de las formas

(31) $$x_i = \overset{0}{x}_i + \mu \overset{1}{x}_i + \mu^2 \overset{2}{x}_i + \ldots$$
$$y_i = w_i + \mu \overset{1}{y}_i + \mu^2 \overset{2}{y}_i + \ldots$$

donde las $\overset{k}{x}_i$ e $\overset{k}{y}_i$ son funciones periódicas de las cantidades

(32) $\quad w_i = n_i t + \omega_i$

y que están representadas por series expresadas según los senos y cosenos de los múltiplos de los argumentos w_i:

(33) $$\overset{k}{x}_i\ (\text{o}\ \overset{k}{y}_i) = A_0 + \Sigma A \cos$$
$$(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h)$$

Para verificar la solución del problema deben substituirse en las ecuaciones canónicas de movimiento las series de los tipos (31) cortadas en sus términos de orden $p + 1$:

(34) $$x_i = \overset{0}{x}_i + \mu \overset{1}{x}_i + \ldots + \mu^p \overset{p}{x}_i$$
$$y_i = \overset{0}{y}_i + \mu \overset{1}{y}_i + \ldots + \mu^p \overset{p}{y}_i$$

Estas series satisfarán formalmente a las ecuaciones de movimiento si después de la substitución la diferencia de los dos miembros de la igualdad resultante es divisible por μ^p.

Finalmente recordaremos la exposición, en forma sucinta aquí, del procedimiento seguido por Lindstedt (Les Méthodes Nouvelles T. II). Para obtener las coordenadas debe determinarse previamente la función intermediaria S, mediante la forma aproximada:

(35) $\quad S_k = \alpha_{k,1} y_1 + \alpha_{k,2} y_2 + \ldots + \alpha_{k,n} y_n + \Phi_k$

los $\alpha_{k,i}$ son coeficientes constantes y Φ_k es una función de las variables $y_1, y_2, \ldots y_k$, cuyo período es 2π. S debe satisfacer entonces formalmente a la ecuación a derivadas parciales:

(36) $\quad F\,(dS/dy_1, dS/dy_2, \ldots dS/dy_n, y_1, y_2 \ldots y_n) = \text{const.}$

Sin mayores dificultades es posible demostrar que S_p tiene la forma

(37) $$S_p = \alpha_{p,1} y_1 + \alpha_{p,2} y_2 + \ldots + \alpha_{p,n} y_n$$
$$+ \Sigma \frac{B \text{ sen } (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n)}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0}$$
$$+ \Sigma \frac{C \cos (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n)}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0}$$

Las $\alpha_{n,i}$ son constantes que se pueden elegir arbitrariamente. El método no falla si los denominadores $m_i n_i^0$ no se anulan, situación que no tiene lugar en el caso presente como se ha visto. En el problema estelar considerado por G. Contopoulos la aparición de denominadores tiene lugar según una ley diferente al caso recientemente expuesto, pero el método no es una excepción en lo que se refiere a la existencia de esos denominadores, lo que constituye un hecho común en todos los métodos de integración que siguen esquemas más o menos similares. El problema de la convergencia admitiría aquí una investigación más restringida en vista que los tipos de denominadores son bien definidos, por lo menos hasta la segunda aproximación. Sin embargo el problema de la convergencia depende aún críticamente de una cuidadosa discusión sobre el rol que juegan las constantes de integración, las que tienen un papel decisivo en la determinación de las configuraciones iniciales que han de conducir a un determinado tipo de solución. Será ahora necesario entonces mencionar un último aspecto vinculado a la manera de determinar las coordenadas a partir de la función S. Definida para ello una transformación de coordenadas por medio de las expresiones:

(38) $\quad x_i = dS/dy_i\ ,\ w_i = dS/dx_i^0\ ;$

en la segunda serie las constantes de integración x_i^0 se han igualado a una nueva serie w_i. Las expresiones de las x_i e y_i serán series de potencias en el parámetro μ y cuyos coeficientes serán funciones de las x_i^0 y w_i.

En el caso planetario se toma como primera aproximación:

(39) $\quad S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots x_n^0 y_n,$

y por lo tanto en la primera aproximación se tendrán:

(40) $\quad x_i = x_i^0\ ,\ y_i = w_i$

La transformación (38) permite escribir como nuevas ecuaciones de movimiento:

$$(41)\qquad dx_i^0/dt = dF/dw_i\ ,\ dw_i/dt = -dF/dx_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

por lo que en esa primera aproximación las w_i son iguales, respectivamente iguales a:

$$(42)\qquad \overline{w}_i = n_i t + \omega_i$$

donde las $\overline{\omega}_i$ son nuevas constantes de integración. Si ahora Σ representa la suma

$$S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_p$$

pueden escribirse las ecuaciones de transformación de la manera siguiente:

$$(42)\qquad x_i = x_i^0 + \frac{d\,(\Sigma_p - S_0)}{dy_i},\ y_i = w_i - \frac{d\,(\Sigma_p - S_0)}{dx_i^0}$$

de las cuales se pueden sacar los distintos términos de los desarrollos:

$$(43)\qquad \begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\, x_i^1 + \mu^2\, x_i^2 + \ldots \\ y_i &= y_i^0 + \mu\, y_i^1 + \mu^2\, y_i^2 + \ldots \end{aligned}$$

LA CUESTION DE LA CONVERGENCIA

Las series anteriormente escritas satisfacen formalmente las ecuaciones

$$(44)\qquad dx_i/dt = dF/dy_i\ ,\ dy_i/dt = -dF/dx_i$$

Las x_i^k e y_i^k son funciones periódicas de las cantidades

$$w_i = n_i t + \overline{\omega}_i$$

pues si en las ecuaciones (44) se cambian las y_i en $y_i + 2k_i\pi$ y las w_i en $w_i + 2k_i\pi$ (los k_i son enteros) estas ecuaciones no cambiarán y los valores de las x_i e $y_i - w_i$ sacados de ellas son funciones periódicas de período 2π respecto a las w_i, de modo que en definitiva se tendrán:

$$(45)\qquad x_i^k\ (\text{o}\ y_i^k) = A_0 + \Sigma\, A \cos\,(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n).$$

La convergencia de los desarrollos fue estudiada por H. Poincaré en base a la siguiente línea de consideraciones:
1) Si las series (45) son convergentes y si tal convergencia es absoluta y uniforme.

2) Si la convergencia no es uniforme, estudiar la posibilidad de reagrupar sus términos de modo de obtener series semiconvergentes.

3) Finalmente ver, si admitida la convergencia de estas series (45), resulte que las series (43) converjan al menos formalmente.

Sólo los lineamientos generales de la demostración pueden ser reproducidos aquí, con aclaración que casi siempre aquella se refiere al caso de dos grados de libertad, cuya extensión al caso general de n grados de libertad se efectúa en los casos necesarios.

La primera parte relativa a la convergencia de las series (45) conduce concretamente a determinar que para ciertos valores de la razón de los movimientos medios (problema de los tres cuerpos) las series son convergentes, y en otros campos de valores de dicha razón tales desarrollos resultan divergentes. El caso particular de la Dinámica que nos ocupa significará estimar los valores de la relación P/Q para inferir los intervalos de convergencia o divergencia para valores particulares de P y Q.

Corresponde entonces pasar a discutir la convergencia de las series (43), cuestión que H. Poincaré ha subdividido del modo siguiente: Las series antedichas dependen de un parámetro μ y de las constantes de integración x_i^0 ($i = 1, 2, \ldots, n$). Se plantean las disyuntivas:

a) Si las series (43) convergen para todos los valores de μ y de las x_i^0 comprendidos en un cierto intervalo.

b) Si las series (43) convergen uniformemente para valores suficientemente pequeños de μ cuando las constantes x_i^0 reciben n valores convenientemente elegidos.

Una discusión muy delicada y elegante sobre la primera disyuntiva conduce a admitir la existencia de 2n integrales uniformes del problema, lo que equivale a decir que los 2n exponentes característicos de la solución se anulan, en oposición a lo demostrado por el mismo Poincaré en su teoría de las soluciones periódicas de las ecuaciones variacionales del problema de los tres cuerpos. Luego, se puede asegurar que las series (43) no convergen uniformemente bajo las condiciones establecidas en las hipótesis a).

Veamos entonces qué puede suceder en el caso de la disyuntiva b). Observemos ante todo que las soluciones (43) pueden ser escritas en forma más compacta:

$$(46)\qquad \begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\Phi(w_k, x_k^0, \mu) \\ y_i &= y_i^0 + \mu\Phi^*(w_k, x_k^0, \mu) \end{aligned}$$

Φ_i y Φ_i^* son funciones desarrollables según potencias crecientes de y periódicas respecto de las w_i, dependiendo de las x_i^0 de una manera cualquiera. Por razones que resultarán inmediatamente conviene agregar que también los movimientos medios admiten desarrollos en serie de la forma:

$$(47)\qquad n_i = n_i^0 + \mu\, n_i^1 + \mu^2\, n_i^2 + \ldots + \mu^p\, n_i^p + \ldots$$

donde como bien se sabe los n_i dependen de las constantes x_i^0. Como los valores medios de las funciones Φ y Φ^* se pueden elegir arbitrariamente (valores iniciales de las funciones cuya representación se busca) se puede, correlativamente elegirlos de modo que se cumpla o

$$(48)\qquad \begin{aligned} n_i &= n_i^0 \\ n_i^1 &= n_i^2 = \ldots = n_i^p = \ldots = 0 \end{aligned}$$

o que la segunda de las circunstancias no se cumpla. En otras palabras de acuerdo a la primera de las posibilidades es posible independizar los movimientos medios de los valores de las masas planetarias; o en su defecto que tal cosa no ocurra. Consideremos (Poincaré) este último caso primeramente, es decir, los movimientos medios dependientes de μ.

Y he aquí que en tal caso es posible demostrar que en la hipótesis de tenerse dos grados de libertad, es posible para valores de μ inferiores a cierto límite, encontrar un valor de la razón de los movimientos medios que sea comensurable (por el momento se suponen arbitrarios los valores de las constantes $\overline{\omega}_1$ y $\overline{\omega}_2$).

Si las (43) convergen entonces, al valor comensurable de la razón de los movimientos medios corresponderá una doble infinidad de soluciones periódicas de las ecuaciones canónicas. Pero la teoría de las soluciones periódicas muestra que esto sólo puede ocurrir en casos muy particulares (Les Méthodes Nouvelles, Nº 42, T. I) y en especial que ello no puede tener lugar para todos los valores de μ inferiores a un cierto límite. Es decir, existe una tal doble infinidad de soluciones para un único valor del parámetro que sea distinto de cero y muy pequeño. De acuerdo al resultado anteriormente expuesto existirían seguramente una doble infinidad de soluciones periódicas para $\mu = 0$ y $\mu = \mu_0$, y sólo un número finito para valores intermedios del parámetro, lo que resulta sumamente inverosímil y hace fuertemente improbable que las series (43) converjan. Tampoco estas series podrían resultar convergentes para una infinidad de conjuntos de valores de las constantes x_i^0 siempre que fuera factible encontrar que uno de tales conjuntos difiera arbitrariamente poco de un sistema previamente fijado. Si así ocurriera existiría una infinidad de valores del parámetro μ para los cuales las soluciones (correspondientes a un valor dado de antemano de la razón de los movimientos medios) tendrían lugar en cantidad infinita. Entonces los exponentes característicos serían nulos para todo ese conjunto de valores del parámetro y por ser, por otra parte, funciones continuas, forzosamente deberán ser iguales a cero. Pero es sabido que ello no tiene lugar, y por lo tanto las (43), si son convergentes, no gozarán de esta propiedad para un conjunto de infinitos valores del parámetro, y en consecuencia no se puede garantir la convergencia.

En la hipótesis a) los valores medios de las funciones Φ y Φ^* se eligen de modo que los movimientos medios dependan únicamente de las constantes de integración y no de las masas. Existe el interrogante si las (43) pueden converger para valores de dichas constantes que sean arbitrarios pero convenientemente elegidos. Tal vez (Poincaré) en el caso de dos grados de libertad x_1^0 y x_2^0 se pueden elegir de modo que la razón de los movimientos medios sea comensurable, pero que su cuadrado no lo sea. La exposición hecha más arriba autoriza a deducir una respuesta negativa, aun en el caso de una hipótesis enunciada al azar.

LA CUESTION DE NUEVAS INTEGRALES DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORIA CLASICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

En general ocurre que si las variables de un problema, digamos x, y, z, están ligadas a sus derivadas respecto a la variable independiente por una relación del tipo:

$K = 0$, donde, si se trata de la Dinámica, K no debe depender explícitamente del tiempo, y tal que esa relación sea compatible con las ecuaciones diferenciales del movimiento, ocurrirá necesariamente que la relación

$$(49) \qquad \frac{dK}{dt} = 0$$

deberá satisfacerse. Ello podrá ocurrir de las tres maneras que se indican a continuación:

1) La ecuación se satisface automáticamente y entonces K es una integral del problema, y $K = 0$ se denominará una solución.

2) La ecuación $dK/dt = 0$ puede coexistir únicamente con $K = 0$. En ese caso habrá relaciones en K que no serán aceptables y deberán dejarse de lado o en caso contrario existirán en K relaciones tales que podrán construirse integrales a partir de ellas. Esto ocurre manifiestamente en el problema de los dos cuerpos y una función tal se denomina subintegral.

3) Puede ocurrir que $dK/dt = 0$ en el problema de los dos cuerpos no se satisfaga idénticamente por cualquiera de las dos causas anteriores, pero puede hacerlo en virtud de otras relaciones. En ese caso, $K = 0$ es una combinación de soluciones, siempre que se trate de un caso admisible de considerar.

La posibilidad 1) sigue siendo trivial en el caso de tres cuerpos. En lo que respecta al caso 2) si la ecuación se satisface en virtud de que se cumple $K = 0$, es decir $dK/dt = 0$ subsiste a causa de esta última relación, se puede demostrar que multiplicando K por un factor conveniente que depende de las variables x y de las variables

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \quad i \neq j$$

y que llamaremos $P(x, s)$, de modo que $KP(x, s) = W$ es en general una integral de las ecuaciones diferenciales y K se denomina una subintegral. La definición admitida de integral tiene el sentido clásico conocido.

Se desprende de esta definición que la función definida por el proceso de recurrencia indicado no corresponde a la que usualmente se considera como una integral de un problema dinámico dado. De ahí la justificación del nombre de invariante aproximado. Sin embargo por el modo de obtenerlo y por las consideraciones recientemente hechas ese invariante podrá ser utilizado para obtener una función determinante S tal que el sistema de ecuaciones de transformación permita obtener respectivamente,

$$(50) \qquad x_i = dS/dy_i \ , \ dS/dx_i^0 = w_i$$

con lo cual queda completado el cuadro que permite asegurar que los resultados obtenidos por Poincaré para estudiar la convergencia de las series de la Mecánica Celeste, son enteramente aplicables al caso estelar propuesto por G. Contopoulos, ambos para el caso particular que el Hessiano de la función F_0 respecto de las variables x sea nulo.

Finalmente debemos mencionar que R. P. Cesco ha realizado investigaciones sobre la naturaleza del método de G. Contopoulos aplicado al problema restringido. En el trabajo mencionado más abajo manifiesta: "In the first part of this paper we discuss two cases in which the celebrated Poincaré's theorem is not applicable but it still holds. In the second part the formal integral of the restricted problem of three bodies proposed by Contopoulos is discussed. We show that without violating Contopoulos' rule his integral $\sum_0^\infty \Phi_n \mu^n$ may be reduced to $\Phi_o{}^* + \mu\Phi_1{}^* \, (q_1, q_2, \tau)$, if use is made of the integral of the osculating problem. Moreover we give a very simple example showing that the approximate integral in μ, obtained by applying Contopoulos' rule, may be in error of order μ^2".

REFERENCIAS

Cesco, R. P.: Exact and Approximate Integrals of some Canonical Systems. Pub. Obs. Astr. La Plata. Serie Astronómica, Tomo XXXVI, 1970.

Forsyth, A. R.: Theory of Differential Equations. Cambridge at the University Press. 1900, Vol. III, Chap. XVII.

Contopoulos, G.: A third Integral of Motion in a Galaxy. Zeitschrift für Astrophysic *49*, 273-291, 1960.

Poincaré, H.: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Dover Pub., 1957, Caps. VIII, IX, XI y XIII, T. II.